Een touwtje om de aarde

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Pythagoras
en
Faculteit EWI, TU Delft

NWD, 9 april 2022: 09:15 – 10:00/15

Vraag 1

Stel je voor dat er een touw strak om de aarde getrokken is, zeg over de polen (en over de nulmeridiaan van Parijs).

Maak het touw één meter langer en til het overal even hoog op.

Hoe hoog komt het touw boven het aardoppervlak?

jaargang 4, nummer 5 (1965) (anoniem, touw rond evenaar);
jaargang 24, nummer 1 (1984) (Jan van de Craats, Luc Kuijk, Hans de Rijk);
jaargang 44, nummer 2 (2004) (KPH).

Vraag 2

Stel je voor dat er een touw strak om de aarde getrokken is, zeg over de polen (en over de nulmeridiaan van Parijs).

Maak het touw één meter langer en til bij de Noordpool op, tot het strak staat. (Alsof je de aarde met het touw aan een spijker ophangt.)

Hoe hoog is die spijker boven de Noordpool?

jaargang 24, nummer 1 (1984) (Jan van de Craats, Luc Kuijk, Hans de Rijk);
jaargang 44, nummer 2 (2004) (KPH).

Vraag 3

Boor een kaarsrechte tunnel van (De Dam in) Amsterdam naar de Martinitoren in Groningen.

Hoe diep ligt de tunnel halverwege?

Tussen de één en tien meter?
Tussen de tien en honderd meter?
Tussen de honderd en duizend meter?

De eerste keer dat Pythagoras op de NDW was organiseerden we tijdens het avondeten een kleine kwis.

Antwoord 1

Vraag 1 is een bekend raadseltje en het antwoord is onafhankelijk van de straal, R, van de aarde.

We zoeken h zó dat $2\pi R + 1 = 2\pi(R + h)$.

Oplossing: $h = \frac{1}{2\pi}$ (ongeveer $16\,\mathrm{cm}$).

Zie ook `Een Stomme Som` (op wiskundemeisjes.nl).

Antwoord 2

Vraag 2 is wat minder bekend.

Zoals gezegd twee keer in Pythagoras
en het was vraag 4 van de Nationale Wetenschapsquiz 2010
(met een `oplossing` die wel heel erg sterk geïnspireerd leek door het stuk uit 2004 . . .)

Antwoord: ongeveer $120\,\mathrm{m}$

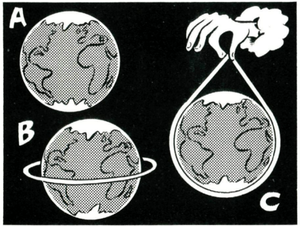
Antwoord 3

Dit was dus een kwisvraagje, vandaar de drie keuzemogelijkheden.

Antwoord: tussen honderd en duizend meter (wat meer dan $400\,\mathrm{m}$).

Het was de vorige eeuw, niet iedereen had een rekenmachientje bij de maaltijd, en de mobiele telefoons waren schaars en nog niet zo knap als nu.
Hoe zou je dit aan tafel, op een servetje, oplossen?

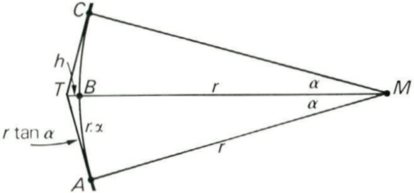
Plaatjes


A
B
C


Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het overal gelijkelijk op. Kan er een muis onderdoor?


Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het bij de noordpool op. Kan er een ijsbeer onderdoor?

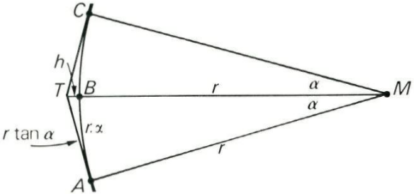
Oplossing uit 1984



Het boogje van A tot de Noordpool (B) is $r\alpha$ lang
en het stuk touw van A tot de spijker (T) is $r \tan\alpha$ lang. Dus

$$r\tan\alpha - r\alpha = \frac{1}{2} \text{ of } \tan\alpha - \alpha = \frac{1}{2r}$$

Oplossing uit 1984



Verder geldt ook

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h} \text{ of } h = r\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

Oplossing uit 1984

Omdat r heel groot is zal $\tan\alpha - \alpha$ heel klein zijn, en α zelf dus ook. Maar dan geldt

$$\frac{\tan\alpha - \alpha}{\alpha^3} \approx \frac{1}{3} \qquad \text{en} \qquad \frac{\frac{1}{\cos\alpha} - 1}{\alpha^2} \approx \frac{1}{2}$$

Rechtvaardiging: toets in op je rekenmachine (in radialen!).
Voor zesdeklassers: gebruik limieten en de regel van De L'Hopital

Oplossing uit 1984

"Zonder merkbare fouten te maken kunnen we de breuken door hun benaderingen vervangen"

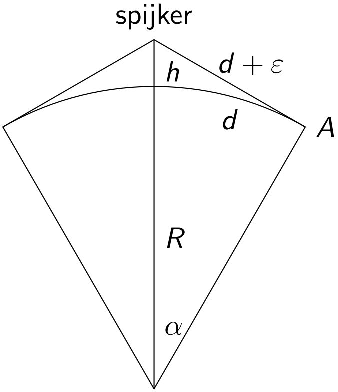
$$\alpha^3 = \frac{3}{2r} \qquad \text{en} \qquad h = r\frac{\alpha^2}{2}$$

En daarmee

$$h = \frac{r}{2}\left(\frac{3}{2r}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Invullen van $r = 6378000$ geeft $h = 121{,}50\ldots\ \mathrm{m}.$

Oplossing uit 2004



h: dit willen we bepalen
R: de straal van de aarde
A: hier komt het touw los
d: afstand A tot de noordpool
ε: halve meter touw
α: deze hoek hebben we nodig

Oplossing uit 2004

- $d = \alpha \cdot R$ (of $\alpha = d/R$) en
- $(R + h)^2 = R^2 + (d + \varepsilon)^2$ (Pythagoras)

Dus

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{R^2 + (d + \varepsilon)^2} - R \\ &= R\left(\sqrt{1 + \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{R}\right)^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Om h te bepalen hebben we R en α nodig.

Getallen invullen

De nulmeridiaan van Parijs is van de Noordpool tot de evenaar is per definitie 10.000 km lang, dus de omtrek van de aarde is, per definitie, 40.000 km.

Dus $R = \frac{40.000.000}{2\pi}\,\mathrm{m}$ $\qquad$ ($R \approx 6.366.197{,}722\,\mathrm{m}$; kleiner dan $r = 6378000$)

Verder: $\tan\alpha = \frac{d+\varepsilon}{R} = \alpha + \frac{\varepsilon}{R}$

Dus α voldoet aan $\tan\alpha - \alpha = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\pi}{40.000.000}$.

Rekenmachientje, of anderzins: $\alpha \approx 0{,}006176$.

In 2004 hadden de rekenmachientjes al vaak een `Solve`knop.

En ik gebruik `fsolve` van Maple.

Het antwoord

Vul nu alles in:

$$h \approx \frac{40.000.000}{2\pi}\left(\sqrt{1+\left(0{,}006176+\frac{\pi}{40.000.000}\right)^2}-1\right) \approx 121{,}429\,\mathrm{m}$$

Met dank aan Maple

Nadere analyse

Met behulp van de stelling van Taylor kunnen we zien hoe h van ε afhangt.

Om te beginnen: $\tan\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$.
(Hadden we in een eerder nummer van Pythagoras gezien.)

En dus

$$\frac{1}{3}\alpha^3 \approx \frac{\varepsilon}{R} \qquad \text{ofwel} \qquad \alpha \approx \left(\frac{3\varepsilon}{R}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Nadere analyse

Ten tweede, voor kleine x geldt $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

Dus

$$\begin{aligned} h &= R\left(\sqrt{1+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2}-1\right) \\ &\approx R\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \\ &\approx R\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3\right)^2 \\ &\approx \frac{1}{2}R\alpha^2 \end{aligned}$$

Afmaker

We hadden $\alpha \approx \left(\frac{3\varepsilon}{R}\right)^{\frac{1}{3}}$ en dus

$$\alpha^2 \approx \frac{3^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}$$

conclusie

$$h \approx \frac{3^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

Dit is dezelfde formule als die uit 1984, maar met de parameter ε er nog in.

Verschil tussen 1984 en 2004

Het (benaderde) antwoord uit 1984 was $h = 121{,}50\,\mathrm{m}$

Het 'exacte' antwoord uit 2004 was $h = 121{,}4288554\,\mathrm{m}$
Het benaderde antwoord uit 2004 was $h \approx 121{,}4295031\,\mathrm{m}$
(ga maar na; en het verschil is minder dan een millimeter)

Wat is er in die twintig jaar met de aarde gebeurd?
Met de straal niets; in 1984 was hij sterk afgerond (zo'n twaalf kilometer).

De formule laat duidelijk de invloed van R op h zien.

In 1974 zou het antwoord nog hoger zijn: mijn tabellenboekje geeft 6.400.000 als straal van de aarde; dat geeft $h \approx 121{,}6440399\,\mathrm{m}$.

Een centimeter?

Wat als je slechts een centimeter touw invoegt?
Kun je het touw zonder hulpmiddelen strak krijgen?

Je kunt de 'exacte' berekening overdoen, of . . .

Een centimeter?

... de benadering nemen, de formule is van de vorm

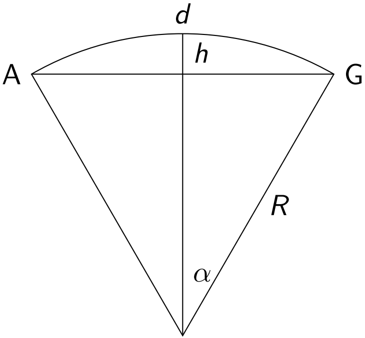
$$h \approx C \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

Als we ε door 100 delen zullen we h door $100^{\frac{2}{3}}$ delen.

Nu geldt $4^3 < 100 < 5^3$, dus $16 < 100^{\frac{2}{3}} < 25$.

Omdat $121/25 > 4$, moet het touw zeker meer dan 4 meter omhoog.
Neem maar een forse keukentrap mee.

Situatieschets



h: dit willen we bepalen

d: de afstand Amsterdam - Groningen

R: de straal van de aarde

α: deze hoek hebben we nodig

Betrekkingen

De formule voor h is redelijk eenvoudig:

$$h = R(1 - \cos\alpha)$$

Maar, herinner: het was een diner in de vorige eeuw
Beschikbaar materiaal: servetjes en pennen

De schatting

Met de natte vinger: d ligt tussen de 100 en 200 kilometer.
Dus, met $\alpha = \frac{d}{2R}$,

$$\frac{\pi}{400} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{200}$$

Dus α is vrij klein.
In dat geval $\sin\alpha \approx \alpha$ en $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$,
we benaderen h met

$$h \approx \frac{1}{2}R\alpha^2$$

Getallen invullen

We vinden dus

$$\frac{1}{2}R\frac{\pi^2}{400^2} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}R\frac{\pi^2}{200^2}$$

en met $R = 40.000.000/(2\pi)$ (in meters):

$$62{,}5\pi \leqslant h \leqslant 250\pi$$

Het derde antwoord is dus correct.

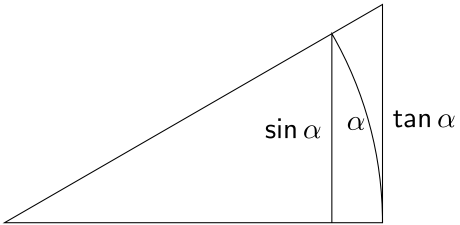
Nauwkeurigheid

De afstand Amsterdam-Groningen is ongeveer 150 km.
Met de benadering vinden we $h \approx 441{,}79\,\mathrm{m}$.

Hoe betrouwbaar is dit eigenlijk?

Nauwkeurigheid

Hoe goed is $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$?



Uit het plaatje: $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

Nauwkeurigheid

Dus weten we dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

En dus ook: $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha > \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$

En daarmee vinden we dan weer

$$1 - \frac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{8}\alpha^4$$

Nauwkeurigheid

Gevolg van dit al:

$$\frac{1}{2}R\alpha^2 > h > \frac{1}{2}R\alpha^2 - \frac{1}{8}R\alpha^4$$

Met $d = 150\,\mathrm{km}$ vinden we

$$\frac{1}{8}R\alpha^4 \approx 1{,}5\,\mathrm{cm}$$

Moraal: de fout door de benadering is te verwaarlozen

Taylor

De getallen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{8}$ de ongelijkheden voor $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ zijn niet optimaal, de stelling van Taylor geeft ons

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5 + \cdots$$

en

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6 + \cdots$$

Treinrails

Opgave

Een treinrail van 30 km zet door de warmte één meter uit en gaat in een boog omhoog staan.
Hoe hoog is hij in het midden?

Min of meer het omgekeerde probleem van de aarde aan een spijker.

Een (echt) rechte weg

Opgave

John Körmeling wilde een echt rechte weg van 6 km laten aanleggen.
Als we die in het midden aan de aarde laten raken hoe hoog ligt hij dan aan de uiteinden boven het aardoppervlak?
Of hoe diep zou je hem in moeten graven?

Voorbij de horizon

Wat kun je nog zien

De afstand Bunschoten–Lopik is 60 km.
Hoeveel kan iemand in Bunschoten van de grote zendmast in Lopik zien?

Hierbij laten we allerlei reflectieverschijnselen buiten beschouwing.

Verder lezen?

Volg de link naar Pythagoras op fa.ewi.tudelft.nl/˜hart