De Wet van Hooke
(not) safe for designers? -II

Tempelman, Erik

Publication date
2019

Document Version
Final published version

Published in
De Constructeur

Citation (APA)
Tempelman, E. (2019). De Wet van Hooke: (not) safe for designers? -II. *De Constructeur*, *59*(11-12), 26-28.

De Wet van Hooke

(NOT) SAFE FOR DESIGNERS? – II

De Wet van Hooke mag gelden als de belangrijkste wet uit de mechanica der materialen. In zijn basisvorm schrijven we deze wet als $\sigma = E \times \varepsilon$. Hierin staat de Griekse letter sigma voor de spanning die we op een materiaal aanbrengen, de *E* voor de stijfheid van het materiaal in kwestie, ook wel elasticiteitsmodulus genaamd, en de (opnieuw) Griekse letter epsilon voor de resulterende rek.

ERIK TEMPELMAN, ADVIESBUREAU ERIKTEMPELMAN.COM, UNIVERSITAIR HOOFDDOCENT TU DELFT – INDUSTRIEEL ONTWERPEN

Let wel: we hebben het hier over *mechanische* spanning – niet over voltage! – gedefinieerd als de kracht op het materiaal *F* gedeeld door het werkzame dwarsoppervlak *A*, dat wil zeggen $\sigma = F/A$. De eenheid is de Pascal, dus N/m^2. De rek is gedefinieerd als de verandering in lengte ΔL die het materiaal ondergaat gedeeld door de oorspronkelijke lengte L, dat wil zeggen $\varepsilon = \Delta L/L$. Afbeelding 1 vat de tot nu toe gebruikte begrippen voor u samen en toont het resulterende lineaire verband tussen spanning en rek. Als we de spanning beschouwen als de *input* dan is de rek de *output* – en de grootheid *E* bepaalt dan hoeveel rek we terugkrijgen voor onze spanning.

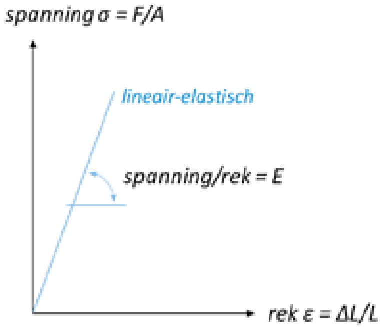
Omgekeerd

De wet werkt ook omgekeerd: als een materiaal wil veranderen van lengte, bijvoorbeeld doordat het warmer wordt, maar dit om de een of andere reden niet kan, dan oefent het een spanning uit op zijn omgeving. Output wordt dan input, en omgekeerd. Nu zijn bij technische materialen zoals staal of beton de thermische uitzettingscoefficiënten gering, en blijven de rekken dus klein, maar omdat deze materialen ook een hoge stijfheid *E* hebben, lopen de spanningen al snel flink op.
De ervaren constructeur past daarom zogeheten *dilatatievoegen* toe in beton, spoorwegrails of een ander constructiedeel. Ook bij boutverbindingen[1] maken we handig gebruik van deze belangrijke wet. En als u rekent met een 'vergeet-mij-nietje' uit de ingenieurs-buigtheorie dan leunt u, wellicht zonder het te weten, stevig op de Wet van Hooke.
Maar… zoals deze bijdrage laat zien is het complete plaatje complexer dan dat simpele $\sigma = E \times \varepsilon$ doet vermoeden. Sterker nog, wie de materiaalkundige fundamenten eronder verkent, ontdekt dat deze belangrijke wet eigenlijk nooit geldt. Maar – *spoiler alert!* – daar hoeft de constructeur zich gelukkig niets van aan te trekken.

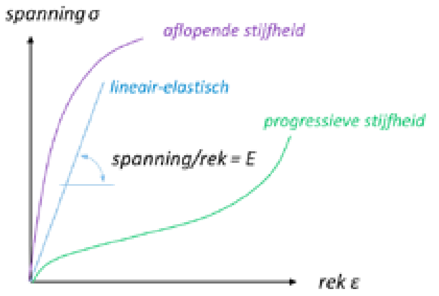
'Wet van Hooke 1.0'

Robert Hooke publiceerde de eerste versie van deze naar hem vernoemde wet in 1676. Zoals te doen gebruikelijk ging dat in het Latijn en wel als u*t tensio, sic vis* – oftewel 'met de verlenging gaat de kracht'. Hij sprak hier bewust over grootheden die betrekking hebben op een concreet *object*, zoals een veer, maar daarmee liep hij wel tegen een probleem op. Een tweemaal zo lange veer zal bij dezelfde kracht tweemaal zo veel verlengen; een tweemaal zo dikke veer vertoont dan de halve verlenging. Hooke kon hierdoor niet de stijfheid als *materiaaleigenschap* isoleren, onafhankelijk van vorm en grootte van het object in kwestie. Waar hij over sprak noemen we nu een veerconstante. De eenheid hiervan is ook anders: niet N/m^2, maar N/m.
De voor de hand liggende stappen om kracht te delen door oppervlak, en verlenging door lengte, werden pas begin 19-de eeuw (!) gemaakt. Zo ontstond het hedendaagse vocabulaire van spanning en rek en kreeg de Wet van Hooke de vorm waarmee deze bij-

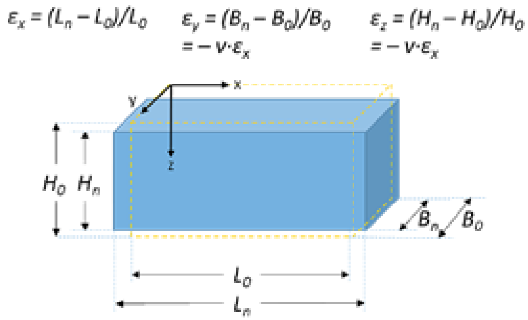
Afbeelding 1:
Spanning, stijfheid, en rek



[1] Zie Constructeur 5, 2016: Over bouten gesproken.



Afbeelding 2: Lineair en niet lineair gedrag



Afbeelding 3: Spanning en rek in 3D

drage begon. Wellicht is het te veel eer om hem naar Robert Hooke te blijven vernoemen, maar de wetenschap is niet altijd eerlijk[2] – en het moet gezegd: het lineaire karakter van veren en materialen komt natuurlijk goed van pas. Lineair rekent nou eenmaal makkelijk.

Lineair of niet-lineair?

Maar… is de trek-rek-kromme van materialen wel een rechte lijn? Nou, zeker niet altijd. Veel biologische materialen, zoals spinrag of de wanden van uw bloedvaten, vertonen progressief stijf gedrag. De trek-rek-kromme is dan zoals afbeelding 2 laat zien. Spinnen en bloedvaten hebben overtuigende motivaties om het zo aan te pakken. Plastics vertonen doorgaans het omgekeerde: stijf bij kleine spanningen, en toenemend slapper als de belasting toeneemt – zie wederom afbeelding 2. Ook 'materialen' zoals gevlochten touw, schuim en allerlei 'meta-materialen' wijken duidelijk af van het lineaire verband dat de Wet van Hooke ons belooft. Linearisering is een optie, maar wie het goed wil doen, dient terdege rekening te houden met niet-lineair gedrag – dat overigens nog steeds elastisch is: als de spanning weer wordt weggenomen, veert het materiaal keurig terug naar de uitgangslengte.
Ook bij metalen is er feitelijk geen sprake van lineair gedrag. Dit komt door het fundamentele gedrag van de materie: trek je bijvoorbeeld aan staal, dan trek je uiteindelijk aan de talloze bindingen tussen de ijzeratomen, en het kracht-weg diagram van deze bindingen is nu eenmaal niet perfect rechtlijnig. Echter, we merken dit normaal gesproken niet, omdat staal (net als vrijwel alle andere metalen) maar zeer weinig rek kan weerstaan voordat het plastisch gaat vloeien – typisch maar zo'n 0,2-0,4%. Het niet-lineaire karakter van de ijzer-ijzerbinding is in dit bereik nauwelijks waarneembaar. We doen er echter goed aan het voor metalen zo typerende elastisch gedrag niet als algemene regel te gebruiken; zoals gezegd bestaan er genoeg uitzonderingen.

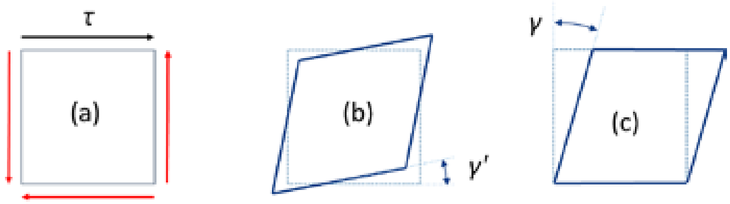
Dwarscontractie

Ook wie de wereld der materialen graag als lineair elastisch opvat, wacht de nodige complicaties. Wie in één richting aan een materiaal trekt, ziet een rek in diezelfde richting – maar in de twee richtingen loodrecht op de aangebrachte spanning gebeurt er ook iets: dwarscontractie. Afbeelding 3 toont dit effect voor een denkbeeldig blokje materiaal met lengte, breedte en hoogte *L*, *B* en *H*. We hebben hier één input – de spanning langs de lengteas σ_x – en drie outputs, te weten de rekcomponenten ε_x , ε_y en ε_z. Die eerste wordt gegeven door $\sigma_x = E \times \varepsilon_x$, en de laatste twee door $\varepsilon_y = \varepsilon_z = - \nu\, \varepsilon_x$. Deze nieuwe grootheid ν (de Griekse letter 'nu') is de *dwarscontractiecoëfficiënt*. Het is een aparte materiaaleigenschap, onafhankelijk van de stijfheid *E*. Dwarscontractie maakt dat spanningen en rekken in drie dimensies aan elkaar gekoppeld zijn: wat in de ene richting gebeurt, wordt mede bepaald door wat er in de andere twee richtingen optreedt. De basisvorm van de Wet van Hooke neemt dit effect niet mee en geldt dan ook alleen voor simpele situaties, te weten éénassige spanning.

[2] Erger nog is dat in het Engels de elasticiteitsmodulus E ook wel de Young's Modulus wordt genoemd - terwijl de goede Thomas Young toch duidelijk later met dit begrip op de proppen kwam dan diverse voorgangers in het vakgebied. C'est la vie.

Nog iets anders

En er is nog iets anders om rekening mee te houden. We beschouwden tot nu toe spanningen als werkend loodrecht op het oppervlak *A* – de zogeheten normaalspanningen – maar spanningen kunnen ook parallel aan datzelfde oppervlak zijn. Het effect van deze schuifspanningen is weergegeven in afbeelding 4. In (a) zien we, in een zijaanzicht, de aangebrachte schuifspanning τ en, in rood, de drie reactiespanningen. In (b) zien we hoe het oorspronkelijke vierkantje wil vervormen, wat we doorgaans iets versimpelen zo->



Afbeelding 4: Afschuifspanning en rek

als getoond in (c). Tussen afschuifspanning τ en afschuifrek γ geldt (voor kleine rekken) de relatie $\tau = G \times \gamma$. Deze 'Wet van Hooke voor afschuiving' introduceert een derde elasticiteitsparameter, de glijdingsmodulus G. Deze is echter niet onafhankelijk van de eerste twee, want voor de meeste materialen geldt $G = E/2(1+\nu)$. Meer goed nieuws is dat afschuiving in één richting alleen een effect in diezelfde richting sorteert: hier is er dus geen koppeling tussen de drie dimensies.

'The Matrix'
Het gevolg van dit alles? In plaats van dat simpele sommetje $\sigma = E \times \varepsilon$ hebben we in de praktijk te maken met een heuse matrixvergelijking. De input is een spanningsvector met zes componenten, de output een rekvector met eveneens zes componenten, en in plaats van die enkele grootheid E staat daar ineens een imposante 6x6-matrix. Daarin zien we de beide grootheden E en ν weer terug:

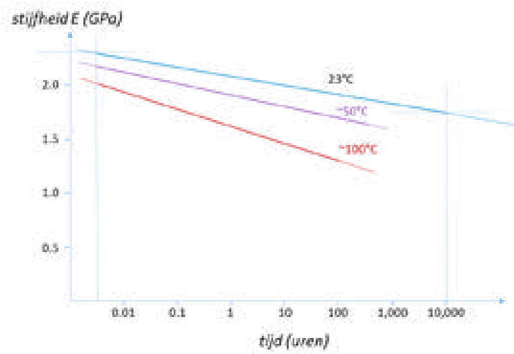
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Robert Hooke zou er van opkijken! En toch… wie deze 'Wet van Hooke 3.0' goed 'leest', ziet al het voorgaande terugkeren: zo is wel er koppeling tussen normaalspanningen in de drie richtingen, maar geen koppeling tussen de drie schuifspanningen. Geldt deze nieuwe matrixvergelijking nu altijd? Welnu, voor isotrope materialen wel, mits we deze als lineair elastisch mogen beschouwen. Isotropie betekent hier dat de elasticiteit onafhankelijk is van de richting die we kiezen. U voelt waarschijnlijk wel aankomen dat ook dit niet altijd het geval is...

Isotropie en anisotropie
Hout is beduidend stijver langs de nerf dan dwars daarop. Ook vezelversterkte plastics ('composieten') zijn (veel) stijver in de richting langs de vezel dan dwars daarop[3]. Wie het elastisch gedrag van dergelijke anisotrope materialen wil beschrijven, heeft meer dan twee onafhankelijke parameters nodig. Een nog relatief simpel scenario van buiging in een plat vlak vereist er al vier[4] en voor echte 3D-situaties zijn er wel tien aparte grootheden nodig om het rekenwerk kloppend te krijgen. Maar daar krijgt u dan ook wat voor terug, want behalve hoge stijfheid per kilogram kunnen composieten ook verrassende effecten vertonen. Buig-torsiekoppeling bijvoorbeeld – handig als u bijvoorbeeld een windturbineblad wilt maken dat zichzelf bij naderende overbelasting 'uit de wind' draait.

Tijd, temperatuur, trillingen…
De belangrijke Wet van Hooke is dus complexer dan het op het eerste gezicht lijkt. Van een simpele vergelijking kwamen we uit op een forse matrix, en het modelleren van het elastisch gedrag van materialen blijkt aardig wat voeten in de aarde te hebben – het experimenteel valideren dus ook. Simpele materialen kunnen we 'vangen' in slechts twee onafhankelijke parameters (E en ν), maar met name bij composieten hebben we meer nodig. En de weg gaat nog verder, want bijvoorbeeld bij plastics hebben we doorgaans ook nog eens te maken met *kruip* en dus met de tijdsduur van de belasting, plus de temperatuur waarop deze werkzaam is. Afbeelding 5 toont de zogeheten 'schijnbare modulus' voor polycarbonaat als functie van tijd en temperatuur. Het is duidelijk dat dit effecten zijn om rekening mee te houden.
En dan zijn we er nog niet! Bij belastingwisselingen – waaronder trillingen – vertonen materialen *hysterese* en dat is toch ook een deel van het elastisch gedrag. Hierbij volgt het materiaal bij het ontlasten een iets andere weg dan bij het belasten, en gaat er per wisseling een beetje energie verloren: snel of langzaam, de trilling dempt uit. Dat gedrag kunnen we dan desgewenst weer modelleren met behulp van de *dempingscoëfficiënt*. Alleen… dat is strikt genomen niet één enkele parameter maar een functie van allerlei andere zaken. Stopt het dan nooit? Wel, uw columnist heeft het einde van de elasticiteit nog niet in zicht – maar wel van deze bijdrage. Dank voor uw aandacht.

Volgende keer in (Not) Safe For Designers?: Von Mises.



Afbeelding 5: De schijnbare modulus van polycarbonaat

[3] Ze zijn ook sterker in diezelfde richting, maar deze bijdrage betreft uitsluitend de stijfheid c.q. elasticiteit.

[4] Typisch zijn dat dan E_x, E_y, G_{xy} en ν_{xy}, mocht u dat gelijk willen weten.